الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة اين خلدون -تيارت -

كلية العلوم الاقتصادية، التجارية والعلوم التسيير

قسم العلوم الاقتصادية

الدوال الاصلية و التكاملات

موجهة لطلبة

السنة الأولى جذع مشترك علوم الاقتصادية، تجارية وعلوم التسيير

من اعداد الدكتور:

مختار مختاري

السنة الجامعية

2023 - 2022

1. الدوال الاصلية :

1.7 دالة اصلية لدالة مستمرة على مجال:

تعريف:

إذ كانت f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$، نسمي دالة أصلية للدالة f على مجال I كل دالة F قابلية للاشتقاق على مجال I و تقبل الدّالة f مشتقاً لها على I .

F دالة أصلية للدالة f على I يكافئ F تقبل الاشتقاق على I وَ التي تحقق :

$$\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$$

مثال1:

- الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $F(x) = x^2 - 3x + 1$ هي دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $f(x) = 2x - 3$ لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $F'(x) = 2x - 3 = f(x)$.
- الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $F(x) = x^2 - 3x - \sqrt{2}$ هي كذلك دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $G'(x) = 2x - 3 = f(x)$.

مثال 2:

الدالة F المعرفة على $]0;+\infty[$ بِـ $F(x) = \sqrt{x} + \cos x$ هي دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بِـ $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sin x$.

مثال3:

نعتبر الدالتين f و F المعرفتين على المجال $]-3;+\infty[$ كمايلي :

$$F(x) = \frac{2x-3}{x+3} - x \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{-x^2 - 6x}{(x+3)^2}$$

أ- تحقق من أجل كل x من $]-3;+\infty[$ ، $F'(x) = f(x)$

ب- اقترح دالة أخرى G بحيث من أجل كل عدد حقيقي من $]-3;+\infty[$ ، $G'(x) = f(x)$

الحل :

أ- الدالة F تقبل الاشتقاق على $]-3;+\infty[$ بحيث :

$$F'(x)=\frac{9}{(x+3)^2}-1$$
$$=\frac{9-(x+3)^2}{(x+3)^2}$$
$$=\frac{9-(x^2+6x+9)}{(x+3)^2}$$
$$=\frac{-x^2+6x}{(x+3)^2}$$
$$=f(x)$$

ب- من أجل كل عدد حقيقي من $]-3;+\infty[$ ، $G(x)=\frac{2x-3}{x+3}-x+4$.

تطبيق :

نعتبر الدالتين h و H المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=2x-3$ و $H(x)=x^2-3x+2$

- بين أن الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.
- عين دالة أصلية أخرى للدالة h على $\mathbb{R}$.

2.7 مجموعة الدوال الأصلية لدالة مستمرة على مجال :

مبرهنة 1:

كل دالة مستمرة على المجال I، تقبل على الأقل، دالة أصلية على المجال I.

مبرهنة 2:

إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن مجموعة الدّوال الأصلية للدالة f على المجال I هي مجموعة الدّوال من الشكل: $x\mapsto F(x)+c$ حيث c عدد حقيقي ثابت.

البرهان:

لتكن f دالة مستمرة على المجال I من $\mathbb{R}$، بما أن f مستمرة على I فإنها تقبل على الأقل دالة أصلية F على I وليكن c عدد حقيقي ثابت. لتكن G الدالة العددية المعرفة على I بـ:

$G(x)=F(x)+c$، بما أن F دالة أصلية للدالة f على I فإن F تقبل الاشتقاق على I

و $F'(x)=f(x)$ ، و بالتالي G تقبل الاشتقاق على I و $G'(x)=F'(x)=f(x)$ ومنه G دالة أصلية للدالة f على I.

نتيجة:

دالتان أصليتان لنفس الدالة تختلفان بثابت فقط.

مثال1:

الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $F(x)=x^3-2x^2$ هي دالة اصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $f(x)=3x^2-4x$. و بالتالي كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال $x\mapsto F(x)+k$ أي $x\mapsto x3-2x^2+k$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

مثال2:

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $f(x)=3x^2+4x-2$. كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال

F المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $F(x)=x^3+2x^2-2x+k$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

3.7 الدالة الأصلية التي تحقق شرطا معينا :

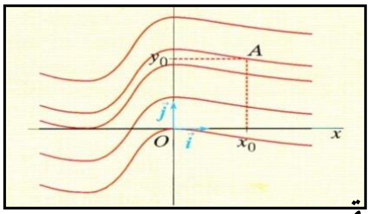
خاصية:

f دالة مستمرة على مجال I. x_0 عدد حقيقي من I و y_0 عدد حقيقي كيفي.
توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F(x_0)=y_0$.

البرهان:

بما أن الدالة f مستمرة على I فهي تقبل دوالا أصلية على I و لتكن G إحدى هذه الدوال الأصلية.
إذا كانت F دالة أصلية أخرى للدالة f على I فإن من أجل كل x من I، $F(x)=G(x)+k$ حيث k عدد حقيقي.
الشرط $F(x_0)=y_0$ يعني أن $G(x_0)+k=y_0$ أي أن $k=y_0-G(x_0)$. لقد تم هكذا تحديد العدد الحقيقي k.

توجد إذن دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F(x_0)=y_0$ و لدينا:
$F(x)=G(x)+y_0-G(x_0)$.



4.7 التفسير البياني:

التمثيلات البيانية في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ للدوال الأصلية للدالة f
تستنتج من أحدها بواسطة انسحابات شعاعها $k\vec{j}$ حيث k عدد حقيقي.
واحد فقط من بين هذه التمثيلات البيانية يمر من النقطة $A(x_0;y_0)$.

مثال1:

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=-\frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}$ و $F(x)=\frac{x-1}{x+1}-2x$

- بين أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$.

طريقة:

لإثبات أن F دالة أصلية لِ f على مجال I يكفي أن نثبت أن F قابلة للاشتقاق على I و أن من أجل كل x من I
$F'(x)=f(x)$.

الحل:

F دالة ناطقة معرفة على $]-1;+\infty[$ فهي إذن قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$ و من أجل كل x من $]-1;+\infty[$

لدينا: $F'(x)=\frac{1(x+1)-1(x-1)}{(x+1)^2}-2=\frac{2}{(x+1)^2}-2$

و منه: $F'(x)=\frac{2-2(x+1)^2}{(x+1)^2}=\frac{2\left[1-(x+1)^2\right]}{(x+1)^2}=\frac{2\left[(1-x-1)(1+x+1)\right]}{(x+1)^2}=\frac{-2x(x+2)}{(x+1)^2}$

و بالتالي: $F'(x)=\frac{-2x^2-4x}{(x+1)^2}=-\frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}=f(x)$

و هكذا من أجل كل x من $]-1;+\infty[$، $F'(x)=f(x)$. إذن F دالة أصلية لِ f على المجال $]-1;+\infty[$.

مثال2:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $f(x)=2x-1$

1. عين كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.
2. عين الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ و التي تحقق $F(2)=-1$.

الحل:

1. كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال $x \mapsto x^2 - x + k$ حيث k عدد حقيقي.
2. لدينا من جهة $F(x) = x^2 - x + k$ و لدينا من جهة ثانية $F(2) = -1$.

$F(2) = -1$ يعني $2^2 - 2 + k = -1$ و منه $k = -3$. نجد هكذا أن $F(x) = x^2 - x - 3$

مثال3:

نعتبر الدالتين F و G المعرفتين على $]2;+\infty[$ كما يلي:

$$F(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2} \quad \text{و} \quad G(x) = \frac{2x - 1}{x - 2} + x$$

باستعمال طريقتين مختلفتين بين أن F و G دالتان أصليتان لنفس الدالة.

الحل:

الطريقة الأولى:

نبين أنه من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F'(x) = G'(x)$

من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F'(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2}$ و $G'(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2}$

إذن من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F'(x) = G'(x)$. الدالتان هما إذن دالتان أصليتان لنفس الدالة.

الطريقة الثانية:

نبين أنه من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F(x) - G(x) = k$ حيث k عدد حقيقي.

من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F(x) - G(x) = \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2}\right) - \left(\frac{2x - 1}{x - 2} + x\right) = \frac{-2(x-2)}{x - 2} = -2$

5.7 حساب الدوال الأصلية لدوال مألوفة :

تم الحصول على النتائج الملخصة في الجدول الموالي انطلاقا من قراءة عكسية لمشتقات دوال مألوفة.

يمثل cعددا حقيقيا كيفيا.

$f(x)=$	$F(x)=$	$I=$
$\mathbf{0}$	$k, k\in R$	$\mathbb{R}$
a	$ax+b$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2+k$	$\mathbb{R}$
x^2	$\frac{1}{3}x^3+k$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+k$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+k$	$]0,+\infty[$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+k$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x}$	$\ln x+k$	$]0,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+k$	$\mathbb{R}^*$
e^x	e^x+k	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x+k$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x+k$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+c$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[,\ (k\in\mathbb{Z})$

6.7 الدوال الأصلية : لـ $f+g$ و kf (k عدد حقيقي)

خواص:

- إذا كانت F و G دالتين أصليتين على الترتيب لدالتين f و g على مجال I فإن $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على المجال I.
- إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I فإن kF دالة أصلية للدالة kf على $(k\in\mathbb{R})$ I.

مثال1:

عين مجموعة الدوال الأصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

- $f(x)=x^3-3x+5$ على المجموعة $I=\mathbb{R}$.
- $g(x)=\dfrac{2}{x^2}$ على المجموعة $I=\mathbb{R}^*$.
- $h(x)=\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ على المجموعة $I=]0,+\infty[$.

الحل:

- لتكن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ معرفة بِ :

$$F(x)=\frac{1}{3+1}x^{3+1}-3\times\frac{1}{2}x^2+5x+c$$
$$=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+5x+c \quad /c\in\mathbb{R}$$

- لتكن أصلية G للدالة g على $I=]-\infty;0[$ معرفة بِ :

$$G(x)=2\left(-\frac{1}{x}\right)+c$$
$$=-\frac{2}{x}+c \quad /c\in\mathbb{R}$$

- لتكن دالة أصلية H للدالة h على $I=]0;+\infty[$ معرفة بِ :

$$H(x)=3\left(-\frac{1}{(3-1)x^{3-1}}\right)-2\sqrt{x}$$
$$=-\frac{3}{2x^2}-2\sqrt{x}+c \quad / \ c\in\mathbb{R}$$

تطبيق 1:

عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

$f(x)=x^3-5x+3$ و $I=\mathbb{R}$ ، $g(x)=\dfrac{3}{x^2}$ و $I=]-\infty;0[$ ، $h(x)=\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ و $I=]0;+\infty[$.

الحل:

دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ معرفة بِـ :

$$F(x)=\frac{1}{3+1}x^{3+1}-5\times\frac{1}{2}x^{2}+3x=\frac{1}{4}x^{4}-\frac{5}{2}x^{2}+3x$$

دالة أصلية G للدالة g على $I=]-\infty;0[$ معرفة بِـ :

$$G(x)=3\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{3}{x}$$

دالة أصلية H للدالة h على $I=]0;+\infty[$ معرفة بِـ :

$$H(x)=2\left(-\frac{1}{(3-1)x^{3-1}}\right)-2\sqrt{x}=-\frac{2}{2x^{2}}-2\sqrt{x}$$

7.7 الدوال الأصلية و العمليات على الدوال:

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.

الدالة f	الدوال الأصلية للدالة f على I	شروط على الدالة u
$u'u$	$\frac{1}{2}u^{2}+c$	
$u'u^{n}$ ($n\in\mathbb{N}^{*}$)	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	
$\frac{u'}{u^{2}}$	$-\frac{1}{u}+c$	من أجل كل x من I، $u(x)\neq 0$
$\frac{u'}{u^{n}}$ ($n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$)	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$	من أجل كل x من I، $u(x)\neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	من أجل كل x من I، $u(x)>0$

مثال1:

عين مجموعة الدوال الأصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

- $f(x)=(x+1)(x^2+2x+5)^2$ على المجموعة $I=\mathbb{R}$.
- $g(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$ على المجموعة $I=\mathbb{R}$.

طريقة:

لتعيين دالة أصلية على مجال I لدالة f يمكننا:

1. ملاحظة إذا كانت f تكتب على أحد الأشكال $u'u^n$ أو $\dfrac{u'}{u^n}$ أو $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ مع تحديد عبارة $u(x)$.
2. حساب $u'(x)$ ثم تحديد عددا حقيقيا k بحيث $f=k\times u'u^n$ أو $f=k\times\dfrac{u'}{u^n}$ أو $f=k\times\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.
3. تطبيق قواعد الدوال الأصلية.

الحل:

- نلاحظ أن الدالة f من الشكل $u'u^n$ مع $u(x)=x^2+2x+5$.

لدينا $u'(x)=2x+2$ أي أن $u'(x)=2(x+1)$ و منه $x+1=\dfrac{1}{2}u'(x)$

نجد هكذا أن: $f(x)=\dfrac{1}{2}u'(x)\times[u(x)]^2$ أي أن $f=\dfrac{1}{2}\times u'u^2$.

و بالتالي فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $c\in\mathbb{R}$ / $F(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}[u(x)]^3+c$

أي $c\in\mathbb{R}$ / $F(x)=\dfrac{1}{6}(x^2+2x+5)^3$.

- نلاحظ أن الدالة g من الشكل $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ مع $u(x)=x^2+1$.

لدينا $u'(x)=2x$ أي أن و منه $3x=\dfrac{3}{2}u'(x)$ نجد هكذا أن: $g(x)=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

أي أن $g=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

و بالتالي فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}G(x)&=\frac{3}{2}\times2\sqrt{u(x)}\\&=3\sqrt{u(x)}\end{aligned}$$

أي $c\in\mathbb{R}$ / $G(x)=3\sqrt{x^2+1}$.

تطبيق 1:

عين مجموعة الدوال الأصلية للدوال التالية :

$f_1(x)=(-2x+3)^4$ ، $f_2(x)=\frac{2x+1}{(x^2+x+3)^3}$ ، $f_3(x)=\frac{1}{x}\ln x$ ، $f_4(x)=2xe^{x^2}$

$f_5(x)=\frac{x}{x^2+1}$ ، $f_6(x)=\frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$.

2. تكامل دالة :

1.8 تعريف التكامل :

أ- **تعريف:**

f دالة مستمرة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I.

يسمى العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$، حيث F دالة أصلية للدالة f على I، التكامل من a إلى b لِ f

و نرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(x)\,dx$. نقرأ:" التكامل من a إلى b لِ $f(x)$ تفاضل x ".

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$$

ملاحظة:

f دالة مستمرة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I. إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالة f على I فإنه يوجد عدد حقيقي k بحيث من أجل كل x من I، $G(x)=F(x)+k$. لدينا:

$$G(b)-G(a)=\left[F(b)+k\right]-\left[F(a)+k\right]=F(b)-F(a)$$

نلاحظ هكذا أن العدد $F(b)-F(a)$ مستقل عن اختيار الدالة الأصلية للدالة f على المجال I.

2.8 نتائج:

- العدد الحقيقي $\int_a^b f(x)\,dx$ موجود معناه f مستمرة على مجال يشمل a وَ b.
- من أجل كل عدد حقيقي a من I، $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- من أجل كل عددان حقيقيان a و b من I، $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- k عدد حقيقي موجب تماماً. $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$

مثال (1):

أحسب التكاملات التالية:

1) $\int_a^b \left(4x^2-3x+6\right)dx$　　2) $\int_{-1}^{1} e^{-2x+1}dx$　　3) $\int_0^{\pi} \cos x\,dx$.

الحل:

-1
$$\int_{-1}^{1}\left(4x^2-3x+6\right)dx=\left[\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+6x\right]_{-1}^{1}$$
$$=\left(\frac{4}{3}-\frac{3}{2}+6\right)-\left(-\frac{4}{3}-\frac{3}{2}-6\right)$$
$$=\frac{20}{3}$$

-2
$$\int_{0}^{-2}e^{-2x+1}dx=\left[\frac{-1}{2}e^{-2x+1}\right]_{0}^{-2}$$
$$=\left(\frac{-1}{2}e^5\right)-\left(\frac{-1}{2}\right)e$$
$$=\frac{-1}{2}\left(e^5-e\right)$$

-3
$$\int_{0}^{\pi}\cos x\,dx=\left[\sin x\right]_0^{\pi}$$
$$=\left(\sin\pi\right)-\left(\sin 0\right)$$
$$=0$$

3.8 الدّالة الأصلية التي تنعدم من أجل قيمة معلومة للمتغير:

مبرهنة:

f دالة مستمرة على مجال I و F دالة أصلية لها، x_0 عدد حقيقي من I.

توجد دالة أصلية وحيدة G تنعدم من أجل قيمة معلومة x_0 من I معرفة بـ:

$$G(x)=F(x)-F(x_0)=\int_{x_0}^{x}f(t)\,dt$$

صيغة أخرى

مبرهنة:

f دالة مستمرة على مجال I و x_0 عدد حقيقي من I.الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على I و التي تنعدم من أجل x_0 هي الدالة $F:x\mapsto\int_{a}^{x}f(t)dt$

ملاحظة:

من الواضح أنه إذا كانت $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ فإن $F'(x)=f(x)$.

4.8 خواص:

لتكن f، f_1، f_2 دوال مستمرة على المجال I وَ F، F_1، F_2 دوال أصلية لها على I على الترتيب. a، b وَ c أعداد حقيقية من I.

أ- علاقة شال

خاصية:

f دالة مستمرة على مجال I. من أجل كل أعداد حقيقية a ، b و c من I لدينا:

$$\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx$$

البرهان:

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\,dx &=\left[F(x)\right]_a^c\\ &=F(c)-F(a)\\ &=F(c)-F(b)+F(b)-F(a)\\ &=\left[F(x)\right]_b^c+\left[F(x)\right]_a^b\\ &=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx\end{aligned}$$

ب- الخطية:

نعلم أن: αF هي دالة أصلية للدالة αf على المجال I و$\alpha F_1+\beta F_2$ دالة أصلية للدالة $\alpha f_1+\beta f_2$ على I.

خاصية:

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I و من أجل كل عدد حقيقي k لدينا:

$$(1)\ \int_a^b [f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

$$(2)\ \int_a^b k f(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$$

البرهان:

العلاقة (1):

نعلم أنه إذا كانت F و G دالتين أصليتين على الترتيب للدالتين f و g على المجال I فإن الدالة $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على المجال I.و منه:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx=[F(x)+G(x)]_a^b=[F(b)+G(b)]-[F(a)+G(a)]$$

$$=[F(b)-F(a)]+[G(b)-G(a)]=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

العلاقة (2):

نتبع منهجية مماثلة علما أنه إذا كانت F دالة أصلية لِ f على I فإن kF دالة أصلية لِ kfعلى I.

طريقة أخرى:

خاصية:

f_1 وf_2 دالتان مستمرتان على مجال Iو kعدد حقيقي.من أجل كل عددين حقيقيين αو β من $\mathbb{R}$ لدينا:

✓ $\int_a^b k.f(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$.

✓ $\int_a^b [\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)]dx=\alpha\int_a^b f_1(x)\,dx+\beta\int_a^b f_2(x)dx$.

البرهان:

✓

$$\begin{aligned}\int_a^b k.f(x)\,dx&=[k.F(x)]_a^b\\&=k.F(b)-k.F(a)\\&=k.[F(b)-F(a)]\\&=k.[F(x)]_a^b\\&=k\int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

.

$$\int_a^b \left[\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)\right]dx=\left[\alpha F_1(x)+\beta F_2(x)\right]_a^b$$

$$=\left[\alpha F_1(b)+\beta F_2(b)\right]-\left[\alpha F_1(a)+\beta F_2(a)\right]$$

$$=\alpha F_1(b)+\beta F_2(b)-\alpha F_1(a)-\beta F_2(a)$$

$$=\alpha F_1(b)-\alpha F_1(a)+\beta F_2(b)-\beta F_2(a) \qquad ✓$$

$$=\alpha\left[F_1(b)-F_1(a)\right]+\beta\left[F_2(b)-F_2(a)\right]$$

$$=\alpha\left[F_1(x)\right]_b^a+\beta\left[F_2(x)\right]_b^a$$

$$=\alpha\int_a^b f_1(x)\,dx+\beta\int_a^b f_2(x)\,dx$$

تطبيق:

نعتبر التكاملين: $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx$ و $B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx$.

1. أحسب $A+B$.
2. أحسب . $A-B$.
3. استنتج A و B.

ج-المقارنة:

خاصية:

f هي دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ ، $(a\leq b)$.

$\forall x\in I, f(x)\geq 0\Rightarrow\int_a^b f(x)\,dx\geq 0$.

البرهان:

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[a,b]$: $f(x)\geq 0$.

F هي دالة أصلية للدالة f على المجال $[a,b]$ يكافئ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال

$[a,b]$, $F'(x)\geq 0$ لان $F'(x)=f(x)$ و هذا يعني أن الدالة F متزايدة تماما على $[a,b]$

و منه

$$\begin{aligned} a \le b &\Leftrightarrow F(a) \le F(b) \\ &\Leftrightarrow F(b) - F(a) \ge 0 \\ &\Leftrightarrow \left[F(x)\right]_a^b \\ &\Leftrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0 \end{aligned}$$

نتائج:

f هي دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ ، $(a \le b)$.

$$\forall x \in [a,b],\ f(x) \le 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le 0$$

$$\forall x \in [a,b],\ f_1(x) \le f_2(x) \Rightarrow \int_a^b f_1(x)\,dx \le \int_a^b f_2(x)\,dx$$

ح-تكامل دالة زوجية - فردية - دورية:

خاصية1:

f دالة زوجية و مستمرة على المجال $[-a,a]$ و $(a \ge 0)$، $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

البرهان:

f مستمرة على المجال $[-a,a]$ مع a عدد حقيقي موجب.

f زوجية معناه من أجل كل x من $[-a,a]$، $f(-x) = f(x)$.

نضع $t = -x$ يستلزم $dt = -dx$.

$x = -a$ يكافئ $t = a$ وَ $x = 0$ يكافئ $t = 0$.

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \\ &= \int_a^0 f(-t)(-dx) + \int_0^a f(x)\,dx \\ &= -\int_a^0 f(t)(dx) + \int_0^a f(x)\,dx \\ &= \int_0^a f(t)(dx) + \int_0^a f(x)\,dx \\ &= 2\int_0^a f(x)\,dx \end{aligned}$$

خاصية2:

f دالة فردية و مستمرة على المجال $[-a,a]$ و $(a \geq 0)$، $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

البرهان:

f مستمرة على المجال $[-a,a]$ مع a عدد حقيقي موجب.

f فردية معناه من أجل كل x من $[-a,a]$، $f(-x) = -f(x)$.

نضع $t = -x$ يستلزم $dt = -dx$.

$x = -a$ يكافئ $t = a$ وَ $x = 0$ يكافئ $t = 0$.

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= \int_{a}^{0} f(t)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= -\int_{0}^{a} f(t)(dx) + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= 0\end{aligned}$$

خاصية3:

f دالة دورية و دورها T و مستمرة على المجال $[a,a+T]$ ، $\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$

البرهان:

f دالة دورية و دورها T و مستمرة على المجال $[a,a+T]$ مع a عدد حقيقي موجب.

f دالة دورية و دورها T على المجال $[a,a+T]$ معناه من أجل كل x من $[a,a+T]$،

$f(x+T) = f(x)$.

نضع $z = x - T$ يستلزم $dz = dx$.

$x = T$ يكافئ $z = 0$ وَ $x = a+T$ يكافئ $z = a$.

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx$$
$$= \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$
$$= \int_0^T f(x)\,dx$$

5.8 القيمة المتوسطة لدالة على مجال :

أ- تعريف:

f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$ مع $a \le b$.

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a;b]$ هي العدد الحقيقي: $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

6.8 حصر القيمة المتوسطة :

خاصية:

f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$ مع $a \le b$.

إذا وجد عددان حقيقيان m و M بحيث من أجل كل x من $[a;b]$، $m \le f(x) \le M$

فإن:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

7.8 المكاملة بالتجزئة:

مبرهنة:

u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على المجال I و a و b عددان حقيقيان من I

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x).v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

البرهان:

بما أن u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على المجال I فإن الدالة $u.v$ تقبل الاشتقاق على المجال I

و $(u.v)'=u'v+uv'$

و بالتالي: $\int_a^b (u.v)'(x)dx=\int_a^b u'(x)v(x)dx+\int_a^b u(x)v'(x)dx$

أي $\int_a^b u(x)v'(x)dx=[u(x).v(x)]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$

مثال:

باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب: $I=\int_0^1 (x-1)e^x\,dx$ و $J=\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin x\,dx$.

تطبيق1:

باستعمال المكاملة بالتجزئة عين الدالة الاصلية للدالة $x\to\ln x$ على المجال $]0;+\infty[$ والتي تنعدم عند 1 .

ملاحظة:

الدوال الأصلية للدالة $x\to\ln x$ على المجال $]0;+\infty[$ هي الدوال $x\mapsto x\ln x-x+c$ و $c\in\mathbb{R}$.

و بصفة عامة الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto\ln(x+a)$ على المجال $]-a;+\infty[$ هي الدوال

$x\mapsto(x+a)\ln(x+a)-x+c$ حيث $c\in\mathbb{R}$.

تطبيق2:

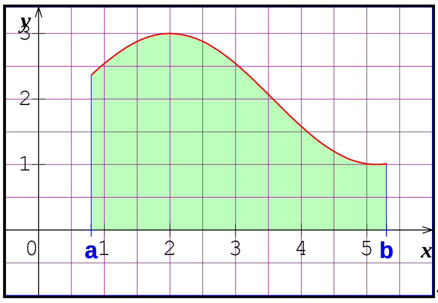
نعتبر التكامل $I=\int_0^1\frac{1}{t^2+1}dt$

1. بين أنه من أجل كل t من $[0;1]$ ، $\frac{1}{t^2+1}\le 1$.
2. استنتج حصرا للعدد I.

تطبيق3:

باستعمال المكاملة بالتجزئة جد دالة أصلية F للدالة f المعرفة على المجال I و التي تنعدم من أجل القيمة x_0 حيث: $f(t)=e^{2t}(1+t)^2$ و $I=\mathbb{R}$ و $x_0=-1$ (استعمل المكاملة بالتجزئة مرتين)

8.8 الدالة الأصلية و مساحة حيز تحت منحن :



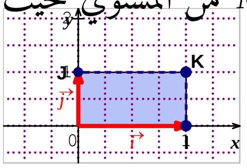
أ- خاصية :

f دالة مستمرة و موجبة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I حيث $a\le b$. (C_f) منحني f في معلم متعامد و F دالة أصلية لِـ f على I. مساحة الحيز تحت المنحني (C_f) بين العددين a و b هو العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$.

و نكتب $\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

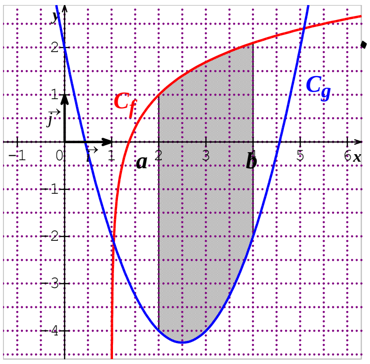
ملاحظات:

- الحيز تحت المنحني (C_f) للدالة الموجبة على المجال $[a,b]$ هو الحيز المحدد بالمنحني (C_f)، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ ، هذا الحيز هو مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي حيث $a\le x\le b$ و $0\le y\le f(x)$



- وحدة المساحة هي مساحة المستطيل $OIKJ$ حيث K هي النقطة التي إحداثياها $(1;1)$ في مستوى مزود بمعلم متعامد $(o,\vec{i},\vec{j})$، وحدة المساحة $(u.a)$.

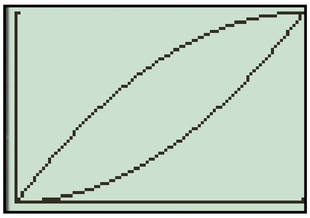
تعميم: f و g دالتان مستمرتان على المجال $[a,b]$ ومن أجل كل x من المجال $[a,b]$، $f(x)\le g(x)$ ، (C_f) و (C_g) تمثيليهما البياني على التوالي في معلم متعامد $(o,\vec{i},\vec{j})$.



نسمي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ و معبر عنها بوحدة المساحة ، العدد الحقيقي $A=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$

تطبيق :

نعتبر دالتين f و g مستمرتين على مجال $[a;b]$ و ليكن (C_f) و (C_g) تمثيليهما البيانيين في معلم متعامد $(O;I,J)$. نهدف إلى حساب، في وضعيات مختلفة، A مساحة الحيز (D) المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) و بالمستقيمين اللذين معادلتاهما على الترتيب $x=a$ و $x=b$.

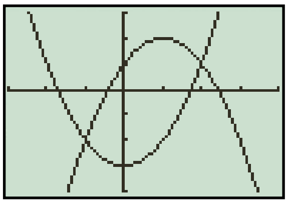


المثال الأول:

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على المجال $[0;1]$ كما يلي:

$$f(x)=-x^2+2x \quad \text{و} \quad g(x)=x^2$$

- مثل المنحنيين (C_f) و (C_g).
- برهن أنه من أجل كل x من $[0;1]$، $f(x)\geq g(x)$
- برر النتيجة: $A=\int_0^1\left[f(x)-g(x)\right]dx$ ثم أحسب A بوحدة المساحة.



المثال الثاني:

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=x^2-3 \quad \text{و} \quad g(x)=-x^2+2x+1$$

- مثل المنحنيين (C_f) و (C_g).
- أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_g) مع تعيين a، b فاصلتي نقطتي تقاطعهما.
- نسمي (C'_f) و (C'_g) محولتي المنحنيين (C_f) و (C_g) على الترتيب بالانسحاب الذي شعاعه $3\vec{j}$.

و ليكن (D') الحيز المحدد بالمنحنيين (C'_f)، (C'_g) و بالمستقيمين اللذين معادلتاهما على الترتيب $x=a$ و $x=b$. برر لماذا للحيزين (D) و (D') نفس المساحة.

- برهن أن $A=\int_{-1}^{2}\left[f(x)-g(x)\right]dx$ ثم أحسب A بوحدة المساحة.

نتيجة:

إذا كانت f و g دالتين مستمرتين على مجال $[a;b]$ بحيث من أجل كل x من $[a;b]$، $f(x) \geq g(x)$

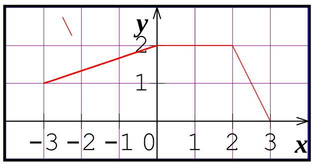
فإن مساحة الحيز (D) المحدد بالمنحنيين (C_f)، (C_g) و بالمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

ملاحظة:

يمكن استبدال المتغير x بأحد الحروف t، q،... فيكون لدينا مثلا $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$

تطبيق 1:



التمثيل البياني المقابل هو لدالة f. أحسب التكاملات التالية:

1. $\int_{-3}^{0} f(x)dx$
2. $\int_{0}^{3} f(x)dx$.
3. استنتج مساحة الحيز المحدد بـ(C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $x=-3$ و $x=3$.

تطبيق 2:

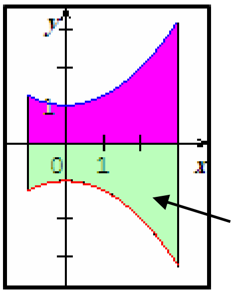
نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $f(x) = 4 - x^2$

1. أرسم المنحني (C) الممثل الدالة f في مستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.
2. أحسب بوحدة المساحة $(u.a)$ مساحة الحيز المحدد بـِ(C) و المستقيمات $x=-1$، $x=1$ و $y=0$.
3. نفرض ان المعلم الذي مثلت فيه الدالة f متعامد حيث الوحدات كما يلي: $2cm$ على محور الفواصل و $1,5cm$ على محور التراتيب.أحسب بـِ cm^2 مساحة الحيز تحت المنحني بين العددين -1 و 1.

9.8 التمديد إلى دالة إشارتها كيفية :

تكامل دالة سالبة على مجال:

لتكن f دالة مستمرة و سالبة على مجال $[a;b]$. و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.



مساحة الحيز (D) المحدد بالمنحني (C_f) و بالمستقيمات التي معادلاتها

$x=a$ ، $x=b$ و $y=0$ هي $A=\int_a^b -f(x)dx$

ملاحظات:

1. اذا كان A هي مساحة الحيز (D) المحدد بالمنحني (C_f) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$ و كانت A' هي مساحة الحيز (D') المحدد بالمنحني (C_{-f}) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$ فان (D) و (D') متناظران بالنسبة الى محور الفواصل و بالتالي $A=A'$

2. نقول ان $\int_a^b f(x)dx$ هي المساحة الحيزية للحيز (D) فتكون سالبة إذا كانت f سالبة على $[a;b]$ و تكون موجبة إذا كانت f موجبة على $[a;b]$.

تطبيق:

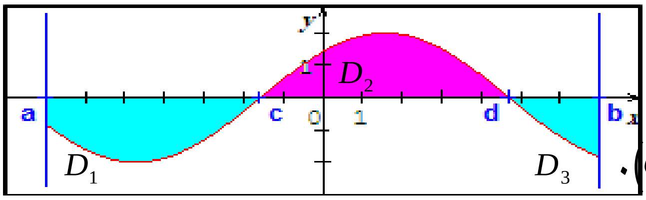
نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=-e^{x-1}$

1. حدد إشارة $f(x)$.

2. انطلاقا من منحنى الدالة الأسية أرسم المنحني (C) الممثل للدالة f.

3. ليكن λ عددا حقيقيا موجبا تماما. أحسب $a(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث: $0\le x\le\lambda$ و $f(x)\le y\le 0$. أدرس نهاية $a(\lambda)$ لما يؤول λ إلى $+\infty$.

10.8 تكامل دالة تغير إشارتها على مجال:



f دالة مستمرة و تغير إشارتها على مجال $[a;b]$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

اذا غيرت f اشارتها على المجال $[a;b]$ بحيث: $f(c)=f(d)=0$.

و من اجل كل x من $[a;c]\cup[d,b]: f(x)\le 0$

و من اجل كل x من $[c;d]: f(x)\ge 0$ فان المساحة A للحيز المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$ هي $A=A_1+A_2+A_3$

أي:

$$A=-\int_a^C f(x)dx+\int_c^d f(x)dx-\int_d^b f(x)dx$$

11.8 تمارين متنوعة

تمرين 1:

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;\pi]$ بِـ $f(x)=\frac{1}{2}+\cos x$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم حدد حسب قيم x إشارة $f(x)$.
2. أرسم تمثيلها البياني (C) في معلم متعامد و متجانس.
3. أحسب A مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=0$، $x=\pi$ و $y=0$.

تمرين 2:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x+1)\cos^2 x\ dx \quad \text{و} \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x+1)\sin^2 x\ dx$$

1. أحسب $I+J$.
2. باستعمال المكاملة بالتجزئة ، أحسب $I+J$.
3. استنتج I و J .

تمرين 3 :

باستعمال التكامل بالتجزئة، أحسب التكاملات التالية:

1) $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$ 2) $\int_1^{2} x\ln x\,dx$ 3) $\int_0^{1}(2x+1)e^{x}\,dx$

4) $\int_0^{e}\frac{\ln x}{x^2}dx$ 5) $\int_1^{x}\ln x\,dx$

تمرين 4 :

باستعمال تكاملين بالتجزئة متتابعين، أحسب التكاملات التالية:

1) $\int_{-1}^{1}(x+1)^2 e^{-x}\,dx$ 2) $\int_0^{\pi} x^2\sin 2x\,dx$ 3) $\int_0^{\pi} e^{2x}\sin x\,dx$.

تمرين 5 :

أحسب التكاملات التالية:

1) $\int_{1}^{4}\frac{x^3-1}{x^2}\,dx$ 2) $\int_{0}^{3}(2x+1)(x^2+x-1)^4\,dx$ 3) $\int_{-1}^{1}(2x^3+5x)(x^4+5x^2+5)^5\,dx$

4) $\int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ 5) $\int_{-1}^{1}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^4}\,dx$ 6) $\int_{0}^{\pi}\sin^2 x\,dx$

7) $\int_{1}^{2}\frac{3-x}{x^2-6x+2}\,dx$ 8) $\int_{-1}^{0}\frac{1}{3x-2}\,dx$ 9) $\int_{0}^{2}\frac{x^4+x^2-1}{x^2}\,dx$

10) $\int_{1}^{4}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\,dx$ 11) $\int_{-1}^{1}\frac{e^x-e^{-x}}{2}\,dx$ 12) $\int_{-1}^{0}\frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

تمرين 6 :

باستعمال التكامل بالتجزئة، أحسب التكاملات التالية:

1) $\int_{0}^{\pi}x\sin x\,dx$ 2) $\int_{1}^{2}x\ln x\,dx$ 3) $\int_{0}^{1}(2x+1)e^x\,dx$

4) $\int_{0}^{e}\frac{\ln x}{x^2}dx$ 5) $\int_{1}^{x}\ln x\,dx$

تمرين 7 :

باستعمال تكاملين بالتجزئة متتابعين، أحسب التكاملات التالية:

1) $\int_{-1}^{1}(x+1)^2e^{-x}\,dx$ 2) $\int_{0}^{\pi}x^2\sin 2x\,dx$ 3) $\int_{0}^{\pi}e^{2x}\sin x\,dx$.

الفهرس